



جعفر اسدی گرمارودی

# یکساز راه حل

می خواهیم حاصل عبارت های زیر را به دست آوریم:

۱)  $1+2+3+\dots+100=?$

۲)  $1+2+3+\dots+99=?$

یک راه برای به دست آوردن حاصل این جمع ها این است که عبارت جمع را به جمع عددهای مساوی تبدیل کنیم تا بتوانیم با استفاده از عمل ضرب حاصل را به دست آوریم. دو عبارت داده شده تفاوت هایی دارند. ابتدا با توجه به تفاوت ها حاصل عبارت ها را به دست می آوریم، سپس راه حل یکسان برای هر دو عبارت ارائه خواهیم داد.

## بررسی عبارت ۱

۱)  $1+2+3+\dots+100=?$

فکر می کنیم به دست آوردن حاصل عبارت (۱) برای بعضی ها آشنا باشد. نکته مهم زوج بودن تعداد عددهاست (یعنی ۱۰۰ تا):

$$1+2+3+\dots+98+99+100=101+101+\dots+101=50 \times 101=5050$$

زوج بودن تعداد عددها باعث شد عدد اول را با عدد آخر جفت کنیم تا عبارت به جمع عددهای مساوی تبدیل شود.

## بررسی عبارت ۲

تعداد عددهای موجود در عبارت جمع فرد است و دیگر نمی توانیم همه آن ها را جفت کنیم چون یک عدد باقی می ماند. البته می توان عدد ۹۹ را کنار گذاشت و حاصل ۱ تا ۹۸ را به دست آورد و سپس حاصل جمع به دست آمده را با ۹۹ جمع کرد:

$$1+2+3+\dots+96+97+98+99=99+99+\dots+99+99=50 \times 99=4950$$

اما می خواهیم یک راه حل دیگر را هم بررسی کنیم. به این منظور ابتدا مسئله را

$$1+2+3=2+2+2=3 \times 2=6$$

با تعداد عدد کمتری در نظر می گیریم:

→ (۳ یک واحد به عدد ۱ می دهد)

عدد ۲ دقیقاً وسط این سه عدد است.

$$1+2+3+4+5=3+3+3+3=5 \times 3=15$$

→ (۵ دو واحد به عدد ۱ و ۴ یک واحد به عدد ۲ می دهد)

عدد سه دقیقاً وسط این پنج عدد است.

با بررسی مثال های

بیشتر می توان نتیجه

گرفت وقتی تعداد عددهایی که

می خواهیم جمع کنیم، فرد است:

(عدد وسطی) × تعداد عددها = حاصل جمع

اکنون نوبت آن است که بفهمیم، عدد وسط را چطور می توان به دست آورد. قبلاً در شماره ۹۸ مجله برهان (اردیبهشت ۱۳۹۷) بررسی کرده بودیم که عدد وسط میانگین این عددهاست و برای به دست آوردن آن کافی است عدد اول و آخر را با هم جمع و سپس بر ۲ تقسیم کنیم:

$$\text{عدد وسط (میانگین) اعداد ۱ تا ۹۹} = \frac{1+99}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

با در دست داشتن عدد وسط:  $1+2+3+\dots+99=99 \times 50=4950$

## راه حل آخر

اکنون می خواهیم راهحلی ارائه کنیم که تعداد زوج و فرد بودن در آن مهم نباشد و فارغ از زوج و فرد بودن تعداد عددها، حاصل جمع آن‌ها را به دست آوریم:

$$1+2+3+\dots+99+100 = \frac{1+2+3+\dots+100+1+2+3+\dots+100}{2}$$

به خاطر اینکه هر عدد دو بار تکرار شده است.

$$= \frac{\overbrace{1+100}^{101} + \overbrace{2+99}^{101} + \overbrace{3+98}^{101} + \dots + \overbrace{99+2}^{101} + \overbrace{100+1}^{101}}{2}$$

$$= \frac{101 \times 100}{2} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$$

## و اگر تعداد فرد باشد:

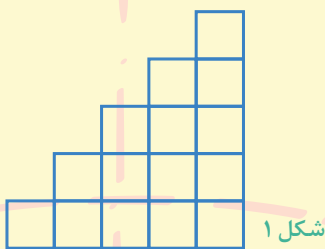
$$1+2+3+\dots+98+99 = \frac{1+2+3+\dots+99+1+2+3+\dots+99}{2}$$

به خاطر اینکه هر عدد دو بار تکرار شده است.

$$= \frac{\overbrace{1+99}^{100} + \overbrace{2+98}^{100} + \overbrace{3+97}^{100} + \dots + \overbrace{99+1}^{100}}{2} = \frac{100 \times 100}{2}$$

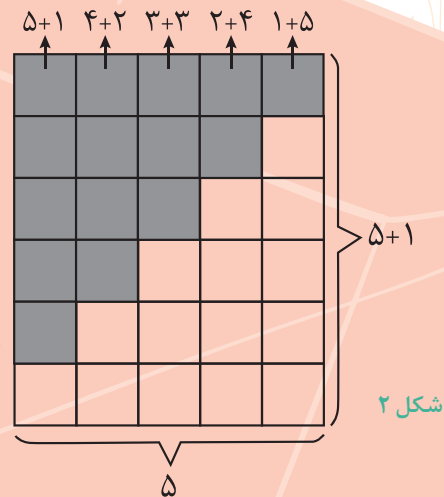
$$= \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$$

با این برخورد دیگر نگران جفت شدن عددها نخواهیم بود. قصد داریم برای راه حل آخر، شکل نیز ارائه کنیم. فقط برای نمایش بهتر، جمع ۱ تا ۵ را به تصویر خواهیم کشید. می خواهیم مساحت مثلث شکل ۱ را به دست آوریم (همان مجموع ۱ تا ۵):



شکل ۱

با برعکس کردن مثلث و با قرار گرفتن دو مثلث کنار هم، یک مستطیل ایجاد می شود (شکل ۲).



شکل ۲

نصف مساحت مستطیل، همان حاصل جمع ۱ تا ۵ است. به عددهای بالای هر ستون و طول و عرض مستطیل دقت کنید تا ارتباط راه حل آخر و شکل مورد نظر را بهتر متوجه شوید.  
مسئله. آیا می توانید حاصل جمع عددهای زیر را که پشت سر هم نیستند، اما به یک فاصله از هم قرار دارند به دست آورید.

### پی نوشت:

۱. به مطلب راهایی که به میانگین ختم می شود صفحه های ۱۲ و ۱۳ در شماره پیاپی ۹۸ مجله مراجعه کنید.

$$2+4+6+\dots+100=?$$

$$1+3+5+\dots+99=?$$

$$3+6+9+\dots+99=?$$